Seat No. : ______________

MD-118

March-2022

B.Sc., Sem.- I

101 : Mathematics

(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચનાઓ : (1) વિભાગ-Iના બધા પ્રશ્નોના ગુણ સમાન છે

(2) વિભાગ -Iમાંથી ગમે તે **ત્રણ**નો જવાબ લખો.

(3) વિભાગ-II પ્રશ્ન–9 ફરજીયાત છે.

વિભાગ – I

1. (A) લાયબ્નીઝ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(B) જો $y = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ તો y_n શોધો. 7

2. (A) અનંત વાસ્તવિક ધન પદોવાળી શ્રેઢી માટે દ' એલમ્બર્ટની ગુણોત્તર કસોટી લખો અને સાબિત કરો. 7

(B) શ્રેઢીની અભિસારીતા વ્યાખ્યાયિત કરો. નીચેની શ્રેઢીની અભિસારીતા ચર્ચો :

(i) $\sum \dfrac{3n+1}{2n+3}$ (ii) $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ 7

3. (A) લાંગ્રાન્જનું મધ્યક માન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. 7

(B) $\cos x$ નું x ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો. 7

4. (A) લા'પીટલનો પ્રથમ પ્રમેય લખો અને $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}$ ની કિંમત શોધો. 7

(B) વિધેય $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[0, 2]$ માટે રોલના મધ્યક માન પ્રમેયનું સમર્થન કરો. 7

5. (A) વ્યાખ્યા આપો : સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણીકો. જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A + A^T$ સંમિત શ્રેણિક અને $A - A^T$ વિસંમિત છે. 7

(B) શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ ને હાર-સંક્ષિપ્ત સોપાન સ્વરૂપમાં ફેરવો અને તેનો કોટિ શોધો. 7

6. (A) n ક્રમના ચોરસ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરો કે $A \cdot (\text{adj } A) = (\text{Adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ 7

(B) ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્તની વ્યાખ્યા આપો અને શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ માટે A^{-1} મેળવો. 7

7. (A) વ્યાખ્યા આપો : લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશો 7

જો λ એ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_n$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય હોય તો દર્શાવો કે

(i) $\lambda + k$ એ $A + kI, k \in R$ નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(ii) λ^3 એ A^3 નું લાક્ષણિક મૂલ્ય છે.

(B) સાબિત કરો કે સંહતિ $x - 3y + z = 2, 2x + y - z = 6, x + 2y + 2z = 2$ સુસંગત છે અને ઉકેલ મેળવો. 7

8. (A) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો અને તેનું શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ માટે ચકાસણી કરો. 7

(B) ચોરસ શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો મેળવો અને કોઈ એક લાક્ષણિક મૂલ્યને અનુરૂપલાક્ષણિક સદિશ શોધો. 7

વિભાગ – II

9. ગમે તે **ચાર**ના જવાબ આપો : 8

(a) $y = e^{2x}$ નું n મું વિકલન મેળવો.

(b) શ્રેણીની અભિસારીતા ચર્ચો : $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

(c) શોધો : $\lim_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$

(d) જો $A = \begin{bmatrix} 1 & i-2 & i \\ 1-i & 3+i & 0 \end{bmatrix}$ હોય તો A^* મેળવો.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો.

(f) જો $\lambda = -1$ એ કક્ષા 2 વાળા ચોરસ શ્રેણિક A નું એકમાત્ર લાક્ષણિક મૂલ્ય છે તો $\det(A) =$ ______.

Seat No. : ____________

MD-118

March-2022

B.Sc., Sem.- I

101 : Mathematics

(Calculus and Matrix Algebra)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions : (1) **All** questions in Section – I carry equal marks.

(2) Attempt any **THREE** questions in Section – I.

(3) Question – **9** in Section – II is compulsory.

Section – I

1\. (A) Write and prove Leibnitz's theorem. 7

(B) If $y = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$, then find y_n. 7

2\. (A) State and prove De' Alembert ratio test for the infinite real positive series. 7

(B) Define convergence of a series. Discuss the convergence of the following series :

(i) $\sum \dfrac{3n+1}{2n+3}$ (ii) $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ 7

3\. (A) State and prove Lagrange's mean value theorem. 7

(B) Expand $\cos x$ in terms of x. 7

4\. (A) State L'Hospital's first theorem and find value of $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}$. 7

(B) Verify Roll's mean value theorem for function $f(x) = x^2 - 2x + 3$, [0, 2]. 7

5\. (A) Define Symmetric and Skew-symmetric matrices. If A is a square matrix, then prove that $A + A^T$ is symmetric matrix and $A - A^T$ is skew-symmetric matrix. 7

(B) Transform the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ into the row reduced echelon form and find its rank. 7

6. (A) For a square matrix A of order n, prove that **7**
$A\cdot(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$

(B) Define inverse of a square matrix. Find A^{-1} for the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **7**

7. (A) Define Eigen value and Eigen vector of a square matrix. **7**
If λ is an eigen value of a matrix $A = [a_{ij}]_n$, then show that
   (i) $\lambda + k$ is the eigen value of $A + kI$, for $k \in R$.
   (ii) λ^3 is the eigen value of A^3.

(B) Prove that the equations $x - 3y + z = 2$, $2x + y - z = 6$, $x + 2y + 2z = 2$ are consistent, and then find its solution. **7**

8. (A) State Cayley-Hamilton theorem. Verify it for matrix $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. **7**

(B) Find the eigen values and eigen vector corresponding to any one eigen value of the square matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. **7**

Section – II

9. Attempt any **FOUR** : **8**
   (a) Find n^{th} derivative of $y = e^{2x}$.
   (b) Discuss convergence of sequence $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.
   (c) Evaluate $\lim_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$.
   (d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & i-2 & i \\ 1-i & 3+i & 0 \end{bmatrix}$, then find A^*.
   (e) Find Characteristic equation of matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   (f) If $\lambda = -1$ is the only eigen value of matrix A of order 2, then det(A) = ______.