Seat No. : _______________

JH-103

June-2022

B.Sc., Sem.-II

103 : Mathematics

(Differential Equations & Co-ordinate Geometry)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

સૂચનાઓ : (1) Section – Iના દરેક પ્રશ્નના ગુણ સમાન છે.

(2) Section – Iમાંથી કોઈપણ ત્રણ પ્રશ્નોના જવાબ લખવાના છે.

(3) Section – IIનો પ્રશ્ન નં. 9 ફરજીયાત છે.

SECTION – I

1. (A) બર્નોલીનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલની રીત સમજાવો. 7

(B) સમીકરણ ઉકેલો : 7

(i) $(\sin y - \cos x)\, dx + (x \cos y + \sin y)\, dy = 0$

(ii) $x \dfrac{dy}{dx} + y = x^3 y^4$

2. (A) ક્લેરોટનું વિકલ સમીકરણ લખો તથા તેના ઉકેલની રીત વર્ણવો.

વધુમાં $p^2 - 3p + 2 = 0$નો ઉકેલ પણ મેળવો, જ્યાં $p = \dfrac{dy}{dx}$. 7

(B) સમીકરણ ઉકેલો : 7

(i) $xyp^3 + (2y^2 - 3x^2)\, p^2 - 6xyp = 0$; જ્યાં $p = \dfrac{dy}{dx}$

(ii) $y = 2p + 3p^2$; જ્યાં $p = \dfrac{dy}{dx}$

3. (A) જો $f(-a^2) \neq 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે : $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax$; જ્યાં $D = \frac{d}{dx}$.

વધુમાં $\frac{1}{D^3 + D^2 + D + 1} \sin 2x$નું સાદુ રૂપ આપો. 7

(B) સમીકરણ ઉકેલો : 7

(i) $(D^4 - 6D^3 + 11D^2 - 6D)y = 0$

(ii) $(D^2 - D - 6)y = 2e^{2x} - 5$

4. (A) જો $f(D + a) \neq 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે : $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$; જ્યાં V-ચલ xનું વિધેય છે. 7

(B) સમીકરણ ઉકેલો : 7

(i) $(D^2 + 9)y = \sin 3x$

(ii) $(x^2D^2 - x D + 1)y = 2 \log x$

5. (A) સમતલ $lx + my + nz = p$, $p \neq 0$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત તથા સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો. 7

(B) સાબિત કરો કે :

ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 10z + 2 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$ પરસ્પર અંદરથી સ્પર્શે છે. સ્પર્શબિંદુના યામ પણ શોધો. 7

6. (A) R^3ના બે ભિન્ન ગોલકો લંબચ્છેદી હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત મેળવો. જો બે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 - kx + 4y + 3 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + kz + 5 = 0$ લંબચ્છેદી હોય, તો 'k' ની કિંમત શોધો. 7

(B) વર્તુળ $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 23 = 0$; $x + 2y - 2z + 5 = 0$નું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો. 7

7. (A) પ્રચલિત સંકેતમાં શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta$ મેળવો. 7

(B) જો R^3માં બિંદુ Aના ગોલીય યામ $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ હોય, તો તેના કાર્તેઝીય અને નળાકારીય યામ મેળવો. 7

8. (A) સાબિત કરો કે સમીકરણ $x^2 + y^2 + z^2 - 16xy - 16yz + 16zx = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે. તેનો અક્ષ અને અર્ધ શીર:કોણ મેળવો. 7

(B) Z – અક્ષને સમાંતર સર્જક રેખાવાળા નળાકારનો આધારવક્ર $x^2 + y^2 + z^2 = 8, x + 2y + 2z = 6$ હોય, તો તે નળાકારનું સમીકરણ મેળવો. 7

SECTION – II

9. ટૂંકમાં જવાબ આપો (ગમે તે ચાર) : 8

(1) વિકલ સમીકરણ $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{4}{3}} = \frac{d^3y}{dx^3}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ લખો.

(2) વિકલ સમીકરણ $e^{y-xp} = 2p + p^2$નો સામાન્ય ઉકેલ મેળવો.

(3) સાદું રૂપ આપો : $\frac{1}{D^2-1}x^3$.

(4) R^2માં $(1, -\sqrt{3})$ કાર્તેઝીય યામવાળા બિંદુના ધ્રુવીય યામ શોધો.

(5) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$ પરના $(0, 1, -1)$ બિંદુએ સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(6) ઉદ્‌ગમબિંદુ શિરોબિંદુ, Y – અક્ષ પોતે જ સમશંકુનો અક્ષ અને θ અર્ધ શીર્ષકોણવાળા સમશંકુનું સમીકરણ લખો.

Seat No. : ______________

JH-103

June-2022

B.Sc., Sem.-II

103 : Mathematics

(Differential Equations & Co-ordinate Geometry)

Time : 2 Hours] **[Max. Marks : 50**

Instructions : (1) Each question in Section – **I** carry equal marks.

(2) Attempt any **Three** questions in Section – **I**.

(3) Question – **9** in Section – **II** is Compulsory.

SECTION – I

1. (A) Write Bernoulli's differential equation and explain the method of its solution. 7

(B) Solve the equations : 7

(i) $(\sin y - \cos x)\, dx + (x \cos y + \sin y)\, dy = 0$

(ii) $x \dfrac{dy}{dx} + y = x^3 y^4$

2. (A) Write Clairout's differential equation and explain the method of its solution. Also solve $p^2 - 3p + 2 = 0$, where $p = \dfrac{dy}{dx}$. 7

(B) Solve the equations : 7

(i) $xyp^3 + (2y^2 - 3x^2)\, p^2 - 6xyp = 0$; where $p = \dfrac{dy}{dx}$.

(ii) $y = 2p + 3p^2$; where $p = \dfrac{dy}{dx}$

3. (A) If $f(-a^2) \neq 0$ then prove that $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax$; where $D = \frac{d}{dx}$. Also simplify $\frac{1}{D^3 + D^2 + D + 1} \sin 2x$. 7

(B) Solve the equations : 7

(i) $(D^4 - 6D^3 + 11D^2 - 6D)y = 0$

(ii) $(D^2 - D - 6)y = 2e^{2x} - 5$

4. (A) If $f(D + a) \neq 0$ then prove that : $\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$; where V is function of variable x. 7

(B) Solve the equations : 7

(i) $(D^2 + 9)y = \sin 3x$

(ii) $(x^2D^2 - xD + 1)y = 2 \log x$

5. (A) Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$, $p \neq 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Also obtain the co-ordinates of the point of contact. 7

(B) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 10z + 2 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$ touch each other internally. Also obtain the co-ordinates of the point of contact. 7

6. (A) Obtain the necessary and sufficient condition for two different spheres in R^3 are orthogonal. If two spheres $x^2 + y^2 + z^2 - kx + 4y + 3 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + kz + 5 = 0$ are orthogonal then find value of 'k'. 7

(B) Find the centre and radius of the circle : 7

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 23 = 0; x + 2y - 2z + 5 = 0$$

7. (A) In usual notation obtain the polar equation of a conic $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$. 7

(B) If the spherical co-ordinates of point A are $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ in R^3, find its Cartesian and Cylindrical co-ordinates. 7

8. (A) Prove that the equation $x^2 + y^2 + z^2 - 16xy - 16yz + 16zx = 0$ represents a right circular cone. Find its axis and semi-vertical angle. 7

(B) Find the equation of the cylinder whose generator line parallel to Z-axis and the guiding curve is $x^2 + y^2 + z^2 = 8$; $x + 2y + 2z = 6$. 7

SECTION – II

9. Give the answer in short (Any **Four**) : 8

(1) Write the order and degree of the differential equation :

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{4}{3}} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

(2) Obtain the general solution of differential equation $e^{y-xp} = 2p + p^2$.

(3) Simplify : $\frac{1}{D^2-1}x^3$.

(4) Find out the polar co-ordinates of the point having Cartesian co-ordinate $(1, -\sqrt{3})$ in R^2.

(5) Find the equation of tangent plane to the sphere

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$ at point (0, 1, –1) on it.

(6) Write an equation of a right circular cone, whose vertex is origin, axis is Y-axis and semi-vertical angle is θ.